Задачи по алгебре (3 семестр)

Лектор — доц. А. Ю. Пирковский
Осенний семестр 2013 г.

Задача 1. Пусть K — поле, X — векторное пространство над K, $X_0 \subset X$ — векторное подпространство коразмерности 1. Докажите, что существует линейный функционал $f\colon X \to K$ такой, что $X_0 = \operatorname{Ker} f$. Докажите, что любые два функционала с этим свойством пропорциональны.

Задача 2. Пусть T — линейный оператор в векторном пространстве X. Положим $X_0 = \operatorname{Ker} T$ и обозначим через T_0 линейный оператор в факторпространстве X/X_0, действующий по формуле $T_0(x + X_0) = T(x) + X_0$ (где $x \in X$). Докажите, что $T^n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ тогда и только тогда, когда $T_0^{n-1} = 0$.

Задача 3. Пусть X — конечномерное векторное пространство, $T \in \mathscr{L}(X)$ — линейный оператор, матрица которого в некотором базисе диагональна. Докажите, что T — циклический тогда и только тогда, когда все числа на диагонали этой матрицы различны.
Подсказка. Начните со случая $\dim X = 2$.

Задача 4. Пусть X — конечномерное векторное пространство, $T \in \mathscr{L}(X)$ — оператор, матрица которого в некотором базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ — жорданова клетка. Докажите, что подпространство $Y \subseteq X$ T-инвариантно тогда и только тогда, когда $Y = \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$ для некоторого k.
Подсказка. Начните со случая, когда эта жорданова клетка нильпотентна.

Задача 5. Пусть T — линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем. Докажите, что наибольшее число линейно независимых собственных векторов оператора T равно числу клеток в его жордановой нормальной форме.

Задача 6. Пусть A — жорданова $n \times n$-матрица над полем K. Докажите, что для каждого $\lambda \in K$ число ее жордановых клеток с λ на диагонали равно $n - \operatorname{rk}(A - \lambda E)$.

Задача 7. Докажите, что линейный оператор T в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем K диагонализируем тогда и только тогда, когда для любого $\lambda \in K$ выполнено равенство $\operatorname{rk}(T - \lambda 1) = \operatorname{rk}(T - \lambda 1)^2$.
Подсказка. Воспользуйтесь жордановой нормальной формой и выясните, на сколько уменьшается ранг оператора $T - \lambda 1$ при возведении в квадрат.

Задача 8. Найдите жорданову нормальную форму оператора T, удовлетворяющего условию $T^2 = 1$.

Задача 9. Найдите жорданову нормальную форму оператора T, удовлетворяющего условию $T^2 = 0$.

Задача 10. Пусть T — линейный оператор в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем. Предположим, что 0 — его единственное собственное значение. Докажите, что T нильпотентный.

Задача 11. Докажите, что группа кватернионов Q_8 и группа диэдра D_4 неизоморфны друг другу.

Задача 12. Докажите, что группы S_3 и D_3 изоморфны.

Задача 13. Докажите, что группа $G \neq \{e\}$ не имеет нетривиальных собственных подгрупп тогда и только тогда, когда G — циклическая группа простого порядка.

Задача 14. Найдите центр группы S_3.

Задача 15. Приведите пример группы и ее подгруппы, не являющейся нормальной.

Задача 16. Пусть $G = S_n$ и $H = \{\sigma \in S_n : \sigma(1) = 1\}$. Является ли H нормальной подгруппой в G?

Задача 17. Пусть G — группа, $H \subset G$ — подгруппа. Предположим, что на множестве левых смежных классов G/H существует бинарная операция, удовлетворяющая условию $(xH)(yH) = (xy)H$ для всех $x, y \in G$. Докажите, что H нормальна в G.

Задача 18. Докажите, что группы $\mathbb{C}^\times/\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{T}$ изоморфны.

Задача 19. Докажите, что группа S_n порождается элементами (12) и $(12\ldots n)$.

Задача 20. Приведите пример двух подгрупп в какой-либо группе G, произведение которых не является подгруппой.
Подсказка. В качестве G можете взять самую маленькую неабелеву группу из Вам известных.

Задача 21. Разлагается ли группа $GL(2,\mathbb{R})$ в прямое произведение подгрупп $SL(2,\mathbb{R})$ и $D = \{\lambda E : \lambda \in \mathbb{R}^\times\}$? Верно ли аналогичное утверждение для $GL(3,\mathbb{R})$?

Задача 22. Пусть $G = \mathbb{Z}$ либо $G = \mathbb{Z}_{p^k}$, где p — простое число, $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что G не разлагается в прямую сумму двух нетривиальных подгрупп, не пользуясь теоремой о «единственности» разложения на циклические слагаемые.

Задача 23. Докажите, что конечная циклическая группа не обладает свойством проективности.

Задача 24. Пусть G — абелева группа (не обязательно конечная), G_{tor} — ее подгруппа кручения. Докажите, что группа G/G_{tor} — без кручения.

Задача 25. Докажите, что любая подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена.

Задача 26. Пусть группа G транзитивно действует на множестве X. Докажите, что стабилизаторы любых двух точек множества X изоморфны. Верно ли это, если действие не транзитивно?

Задача 27. Докажите, что множество матриц

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

образует подалгебру в $M_2(\mathbb{R})$, и постройте изоморфизм между A и $\mathbb{C}$.

Задача 28. Пусть A — алгебра над полем $\mathbb{Z}_p$. Докажите, что $(a+b)^p = a^p + b^p$ для любых $a, b \in A$.

Задача 29. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей. Докажите, что кольцо $R[x]$ целостное тогда и только тогда, когда R целостное.

Задача 30. Является ли тело кватернионов $\mathbb{H}$ алгеброй над $\mathbb{C}$?

Задача 31. Докажите, что коммутативное кольцо R с единицей является полем тогда и только тогда, когда в нем нет нетривиальных (т.е. отличных от $\{0\}$ и R) идеалов.

Задача 32. Докажите, что кольцо целых гауссовых чисел $\mathbb{Z}[i]$ — евклидово относительно нормы $N(a+ib) = a^2 + b^2$.

Задача 33. Рассмотрим множество $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Докажите, что $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ — подкольцо в $\mathbb{R}$ и евклидово кольцо относительно нормы

$$N(a + b\sqrt{2}) = |a^2 - 2b^2|.$$

Подсказка. Чтобы поделить a на b с остатком, надо представить число $a/b \in \mathbb{R}$ в виде $c + d\sqrt{2}$, где $c, d \in \mathbb{Q}$, а потом приблизить c и d целыми числами.

Задача 34. Пусть $p \in \mathbb{Z}$ — простое число. Рассмотрим множество

$$R = \{a/b \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ \text{НОД}(a, b) = 1,\ p \nmid b\}.$$

Для каждого $r = a/b \in R \setminus \{0\}$, где $p \nmid b$, обозначим через $N(r)$ наибольшее из тех $k \in \mathbb{Z}_+$, для которых $p^k \mid a$. Докажите, что R — подкольцо в $\mathbb{Q}$ и евклидово кольцо относительно нормы N.

Задача 35. Пусть R — евклидово кольцо с нормой N, $u \in R \setminus \{0\}$ — элемент наименьшей нормы. Докажите, что u обратим.

Задача 36. Пусть R — евклидово кольцо с нормой N, и пусть $a, b \in R$. Докажите, что $N(ab) > N(a)$, если b необратим. Что можно сказать про $N(ab)$ и $N(a)$, если b обратим?

Задача 37. Пусть R — кольцо главных идеалов, и пусть $a, b, c \in R$. Докажите, что $\text{НОД}(a, b, c) = \text{НОД}(a, \text{НОД}(b, c))$.

Задача 38. Пусть p — простое число. Докажите, что в $\mathbb{Z}_p[x]$ справедливо равенство

$$x^p - x = \prod_{a \in \mathbb{Z}_p} (x - a).$$

Задача 39. Приведите пример неглавного идеала в кольце многочленов $\mathbb{C}[x, y]$.

Задача 40. Приведите пример неглавного идеала в кольце многочленов $\mathbb{Z}[x]$.

Задача 41. Приведите пример неглавного идеала в алгебре непрерывных функций $C(\mathbb{R})$.

Задача 42. Представимо ли кольцо непрерывных функций $C(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ в виде прямой суммы двух своих нетривиальных идеалов?

Задача 43. Представимо ли кольцо непрерывных функций $C(\mathbb{R})$ в виде прямой суммы двух своих нетривиальных идеалов?

Задача 44. Пусть R — коммутативное кольцо с единицей, N — множество всех его нильпотентных элементов. Докажите, что N — идеал в R, и что факторкольцо R/N не содержит нильпотентных элементов, кроме нуля.

Задача 45. Пусть K — поле и $R = \{f = \sum_i a_i x^i \in K[x] : a_1 = 0\}$. Докажите, что элементы x^5 и x^6 не имеют наибольшего общего делителя в R.